

Equazioni e disequazioni

1. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = |x - 2| + 3 & b) f(x) = \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| \\ c) f(x) = (x + 1)^4 - 4 & d) f(x) = x^2 + |x| - 5 \\ e) f(x) = |x - 1| + 2x & f) f(x) = |5x - 3| + 3. \end{array}$$

2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$ e verificare che f è pari.

3. Fattorizzare i seguenti polinomi:

$$a) x^3 - 3x^2 - x + 3; \quad b) x^3 + x^2 - 2x; \quad c) x^3 - x^2 - x - 2.$$

4. Dato il polinomio

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9x - 6,$$

dire se è divisibile per $x - 5$ e trovarne le radici reali. Dire poi se la disequazione $p(x) > 0$ è equivalente a $\frac{x - 1}{x + 2} > 0$.

5. Risolvere le disequazioni:

$$\begin{array}{ll} a) 5x^3 - 2x^2 - 5x + 2 < 0 & b) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1} > 0 \\ c) x^4 - 10x^2 + 9 > 0 & d) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 10} > 0 \\ e) \frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10 & f) 2(x^2 - 5)(x^2 + 4) < 0. \end{array}$$

6. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$\begin{array}{ll} a) 2x + 1 > \sqrt[3]{7 + 8x^3} & b) 2x - 3 > \sqrt{4x^2 - 13x + 3} \\ c) 3 - 2x < \sqrt{x + 1} & d) x + 2 < \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 20x - 7} \\ e) \sqrt{2x - 1} > \sqrt{3x - 4} & f) \sqrt{x - 1} < \sqrt{2x - 3}. \end{array}$$

7. Risolvere:

$$\begin{array}{ll} a) 9^x + 3^{x+1} - 4 = 0 & b) 25^x - 5^x - 2 \geq 0 \\ c) 25^x - 5 \cdot (1 - 4 \cdot 5^{x-1}) \geq 0 & d) 49^x + 7^x - 6 \leq 0. \end{array}$$

8. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \log(5x^3) & b) f(x) = \log[9x(x-7)^2] \\ c) f(x) = \log\left(\frac{3x+3}{x-1}\right) & d) f(x) = \log(x^2 - x + 1) \\ e) f(x) = \log_3(x - \sqrt{x^2 - 2x}) & f) f(x) = \sqrt{1 - 2\log_4 x} - \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} \\ g) f(x) = \log(-x^2 - x - 5) & h) f(x) = \frac{\log(4 - x^2)}{\sin x} \\ i) f(x) = \frac{\log(4 - x^2)}{\tan x}. \end{array}$$

9. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \log|x| + 2 & b) f(x) = \log|x+3| \\ c) f(x) = |\log|x| - 4| & d) f(x) = e^{4|x|} \\ e) f(x) = e^{3|x-5|} & f) f(x) = e^{|x|+6} \\ g) f(x) = \log(|x| + 2) & h) f(x) = 4e^{|x-1|}. \end{array}$$

10. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{ll} a) 4^{|x|} > \frac{4}{x} & b) 5^x \leq 6 - x^2 \\ c) \log|x| \leq x^2 - x & d) \log|x| > x - 1. \end{array}$$

11. Determinare il periodo delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sin \frac{4}{9}x & b) f(x) = \cos(2x + \frac{3}{10}\pi) \\ c) f(x) = \tan(3x - \frac{\pi}{8}) & d) f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{7}x - 2) \\ e) f(x) = 9\tan(6x). \end{array}$$

12. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
a) f(x) = \cos 5x - 1 & b) f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \\
c) f(x) = \tan(\frac{x}{4}) + 3 & d) f(x) = \cos(2x - \pi) \\
e) f(x) = 3 \sin(2\pi x + 1) & f) f(x) = |\sin(x - \frac{\pi}{2})| \\
g) f(x) = |\tan \frac{x}{\pi}|.
\end{array}$$

13. Risolvere:

$$\begin{array}{ll}
a) \sin^3 x - 1 = 0 & b) \sin(3x - 2) = \frac{1}{2} \\
c) \sin x - \cos 2x = 2 & d) |\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\
e) \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x < 0.
\end{array}$$

14. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{ll}
a) \sin x - \cos x \geq 1 & b) -1 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\
c) 3 \tan x < \sqrt{3} & d) |\cos(3x)| \leq \frac{1}{2}
\end{array}$$

15. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{ll}
a) x^2 + x - 5 \leq 1 & b) x^2 + x + 10 \geq -1 \\
c) 3x^2 - 5 \geq 5x + 1 & d) -4x^2 - 4x - 5 \geq -3 \\
e) 5x^2 + 4x - 1 \leq |x + 2| & f) 2x^2 + |x| - 5 \geq |3x + 3| \\
g) \frac{x+1}{1-2x} \geq 1 & h) \left| \frac{3x-1}{x+2} \right| \leq 4.
\end{array}$$

16. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
a) f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 4} & b) f(x) = \sqrt{x^2 + |x| - 3} \\
c) f(x) = \frac{1}{x^3 - 8} & d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{|x^2 + 4x - 5|}} \\
e) f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 5} & f) f(x) = \sqrt{-2x^2 + x - 4} \\
g) f(x) = (x^2 + 5x - 3)^{\frac{1}{3}}.
\end{array}$$

17. Rappresentare graficamente i seguenti sottoinsiemi del piano:

$$\begin{array}{l}
a) A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 \geq 0, y \geq x\}; \\
b) B = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \geq y - 7, y \leq -5x + 3\}; \\
c) C = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : 10x^2 - 3y^2 \geq 13, y \geq 2x\}.
\end{array}$$

Equazioni e disequazioni - Risultati (cenni)

2. $x \in [-1, 1]$.

3. a) $(x-1)(x+1)(x-3)$; b) $x(x-1)(x+2)$; c) $(x^2+x+1)(x-2)$.

4. Il polinomio non è divisibile per $x-5$; le sue uniche radici reali sono 1 e -2 ; la disequazione $p(x) > 0$ è equivalente a $\frac{x-1}{x+2} > 0$.

5. a) $x < -1$ o $\frac{2}{5} < x < 1$; b) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$;
 c) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$; d) $x < 2$ o $x > 3$; e) $x > 1$;
 f) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

6. a) $x < -1$ o $x > 2$; b) $x \geq 3$; c) $x > \frac{13-\sqrt{41}}{8}$; d) $3 < x < 5$;
 e) $\frac{4}{3} \leq x < 3$; f) $x > 2$.

7. a) $x = 0$; b) $x \geq \log_5 2$; c) $x \geq 0$; d) $x \leq \log_7 2$.

8. a) $x > 0$; b) $x \in (0, 7) \cup (7, +\infty)$; c) $x < -1, x > 1$; d) $\mathbf{R}$;
 e) $x \geq 2$; f) $(0, 1) \cup (1, 2]$; g) $\emptyset$; h) $(-2, 0) \cup (0, 2)$;
 i) $(-2, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2)$.

11. a) $T = \frac{9}{2}\pi$; b) $T = \pi$; c) $T = \frac{\pi}{3}$; d) $T = 14$; e) $T = \frac{\pi}{6}$.

13. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$;
 c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$;
 d) $x \in \{[2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi] \cup [\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi] \cup [\frac{7}{4}\pi + 2k\pi, (2k+1)\pi]\}, k \in \mathbf{Z}$;
 e) $x \in (k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

16. a) $(-\infty, \frac{-5-\sqrt{73}}{6}] \cup [\frac{-5+\sqrt{73}}{6}, +\infty)$;
 b) $(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$;
 c) $x \neq 2$;
 d) $x \neq -5, x \neq 1$;
 e) $\frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2}$;
 f) $\emptyset$;
 g) $\mathbf{R}$.