Corso di Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale (2006-2007)

(Prof. G. Zilli)

Esercitazione su equazioni nonlineari: l'equazione di Colebrook-White

L'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = -2\log_{10}\left(\frac{e}{3.51d} + \frac{2.52}{N_R}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{1}$$

è detta di Colebrook-White e si usa per determinare il fattore di frizione x, per flussi turbolenti in tubi lisci o ruvidi. Tale equazione è non lineare e dipende dai parametri:

- e scabrezza del tubo (in metri)
- d diametro del tubo (in metri)
- N_R numero di Reynolds

Si chiede di risolvere tale equazione per tutte le combinazioni (8) dei seguenti valori dei parametri: $e = (1.\text{E-}6, 1.\text{E-}2)$, $d = (0.05, 0.20)$, $N_R = (1.\text{E}4, 1.\text{E}6)$, con i metodi:

1. Newton-Raphson
2. Tangente fissa
3. Secante variabile
4. Punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$

Per ciascun metodo si utilizzi un test di uscita sullo scarto $s_k = (x_{k+1} - x_k)$ con tolleranza (1.E-4 in singola precisione e) 1.E-10 in doppia precisione. In ciascun caso stampare i risultati relativi ad ogni singola iterazione e verificare l'ordine di convergenza del metodo.
Facoltativo: calcolare in ciascun caso la costante asintotica come $|s_k|/|s_{k-1}|^p$ dove s_k è lo scarto all'iterazione k-esima e p è l'ordine di convergenza.

Suggerimento: può essere utile effettuare nella (1) il cambio di variabile: $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$t = -2\log_{10}\left(\frac{e}{3.51d} + \frac{2.52}{N_R}\,t\right) = g(t). \qquad f(t) = t - g(t) = 0 \tag{2}$$

Esempio di output:
Newton applicato alla (2), punto iniziale $x_0 = 1$, $e = 1.\text{E-}6, d = 0.2, N_R = 1.\text{E}4$

iter k	t_k	scarto	$f(t_k)$	$\|s_k\|/\|s_{k-1}\|^2$
1	4.32224838	0.332225E+01	-0.160246E+01	3.32225
2	5.65684036	0.133459E+01	-0.343899E−01	0.12092
3	5.68665645	0.298161E−01	-0.120004E−04	0.01674
4	5.68666687	0.104116E−04	-0.145306E−11	0.01171
5	5.68666687	0.126033E−11	0.000000E+00	0.01163

La soluzione finale x_k si ottiene dalla formula

$$x_k = \frac{1}{t_k^2} = 0.0309231997$$

Corso di Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale (2006-2007)

(Prof. G. Zilli)

Esercitazione su equazioni nonlineari: l'equazione di van der Waals

La legge di stato di un gas perfetto è data dalla equazione:

$$pV = nRT \tag{3}$$

dove p è la pressione, V è il volume, n è il numero di grammi-molecole, T è la temperatura assoluta ed R è la costante universale dei gas. L'eq. (3) è valida per pressioni e temperature comprese in un intervallo limitato ed inoltre alcuni gas la soddisfano meglio di altri.

Per i gas reali l'eq. (3) è stata corretta da van der Waals nella relazione:

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \tag{4}$$

dove le costanti a e b sono determinate empiricamente per ogni specifico gas.

Volendo progettare dei contenitori per l'anidride carbonica (CO_2) e l'ossigeno (O_2) per diverse combinazioni dei valori di p e T, è necessario calcolare accuratamente con la (4) il volume

$$v = V/n \tag{5}$$

occupato da una grammo-molecola.

Sono assegnati i seguenti dati:

$$R = 0.082054 \text{ l atm/(K mol)}$$

$$\begin{cases} a &= 3.592 \text{ atm l}^2/\text{mol}^2 \\ b &= 0.04267 \text{ l/mol} \end{cases} \text{ per } CO_2 \qquad \begin{cases} a &= 1.360 \text{ atm l}^2/\text{mol}^2 \\ b &= 0.03183 \text{ l/mol} \end{cases} \text{ per } O_2$$

Le pressioni e le temperature di progetto sono:

p(atm)	1	1	1	10	10	10	100	100	100
T(K)	300	500	700	300	500	700	300	500	700

Determinare i volumi (5) risolvendo la (4) con il metodo di Newton Raphson per i dati di progetto. Usare l'eq. (3) per individuare il volume iniziale v_0 $(= RT/p)$.

Scrivere un programma (ad esempio in *FORTRAN*) che, per una assegnata tabella di valori di p e T e per ogni specifico gas, calcola con la (3) il valore v_0 iniziale e trova il valore finale v_{fin} risolvendo la (4) con lo schema di Newton-Raphson. Se si lavora in singola precisione usare il valore tol = 1.e-4 per il test di uscita in doppia precisione tol = 1.e-10. Stampare per i due gas assegnati e per ogni valore di p e T di progetto, v_0, v_{fin} ed il numero di iterazioni richieste per ottenere v_{fin}. Stampare inoltre i risultati intermedi per ogni iterazione (si veda come esempio la tabella di output dell'equazione di Colebrook-White).
Suggerimento: scrivere la (4) in funzione dell'incognita v come

$$f(v) = \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT = pv + \frac{a}{v} - \frac{ab}{v^2} - bp - RT \qquad \Longrightarrow \qquad f'(v) = \frac{2ab}{v^3} - \frac{a}{v^2} + p$$

Facoltativo: Altri schemi suggeriti: dicotomico, secante variabile, tangente fissa e secante fissa.